Tema 6: Teorema de Representación de Riesz

10 y 13 de mayo de 2010

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f \, d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), \; f \geqslant 0 \implies \Phi_\mu(f) \geqslant 0$$

¡El recíproco también es cierto!: Todo funcional lineal positivo es una integral

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf \{\mu(U) : U \text{ abierto},\ E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

(2) $\mu(U) = \sup \{\mu(K) : K \text{ compacto},\ K \subseteq U\} \quad (U \subseteq L,\ U \text{ abierto})$

(3) μ es localmente finita

(4) $\Phi(f) = \int_L f \, d\mu \quad \big(f \in C_{00}(L)\big)$

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : U \text{ abierto}, \ E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, \ K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular = regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ. Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si X es σ-compacto, toda medida de Borel positiva en X, regular exterior y localmente finita es regular
- Si X es localmente compacto y todo abierto de X es unión numerable de compactos, entonces toda medida de Borel positiva y localmente finita en X es regular

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en L, regular exterior y localmente finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho, μ es regular

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de L puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel localmente finita μ en L que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\big) < \infty$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $g \in C_{00}(L)$ verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

Corolario importante

Si μ es una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L, entonces $C_{00}(L)$ es denso en $L_p(\mu)$ para $0 < p < \infty$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\ K, U\ : \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq\ U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de $M(\mathcal{B})$, luego espacio de Banach con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \qquad \big(\lambda \in M(L)\big)$$

$\lambda \in M(L) \Rightarrow C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|)$ y podemos definir $\Phi_\lambda : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ por

$$\Phi_\lambda(f) = \int_L f\, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

Φ_λ es lineal, puede no ser positivo, pero es continuo: $\Phi_\lambda \in C_{00}(L)^*$

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X,Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \text{mín}\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Norma de operadores. $L(X,Y)$ espacio normado, espacio de operadores
Convergencia en $L(X,Y)$ $=$ Convergencia uniforme en B_X
Y completo $\implies$ $L(X,Y)$ completo

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

Norma dual. X^* espacio dual de X

Para espacios X concretos, es útil tener descripciones concretas de X^*

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico Ψ de $M(L)$ sobre $C_{00}(L)^*$ viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f\,d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L)\big)$$

Caso compacto

$$C(K)^* \equiv M(K)$$

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$$

Es claro que $\varphi \in C[0,1]^*$. De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)|\,dt = \|g\|_1$$

Obsérvese que estamos viendo

$$L_1[0,1] \subseteq M[0,1] \equiv C[0,1]^*$$